

Hoja 3: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \operatorname{sen} x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$
(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\sqrt{x} + x - 1}$ (k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2 + 4x + 3}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{x}$
(m) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \left[\frac{3}{x} \right]$ (ñ) $\lim_{x \rightarrow 1} x \left[\frac{3}{x} \right]$
(o) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{[x]}$ (p) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \right|^3 + x^6 - 1 \right)^{[x]}$ (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

3.- Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 1.$$

4.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- (b) Si no existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.
- (c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$.

5.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denote la parte entera de x , es decir, el mayor entero menor o igual que x :

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = x - [x]$ (c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$
(d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ (e) $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ (f) $f(x) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right]}$

6.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \quad f_3(x) = x \left[\frac{1}{x} \right], \quad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [a - 1, a), \\ x + a & \text{si } x \in [a, a + 1]. \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si } x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4| & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad f_8(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} & \text{si } x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.
- (b) Si una función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces es continua.
- (c) Si f es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en \mathbb{R} .

8.- Demostrar que no existe ninguna función continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} que tome exactamente dos veces cada valor.

9.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

10.- Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a, b) .

11.- Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x . Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0, 1]$.

12.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \quad (b) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12$$